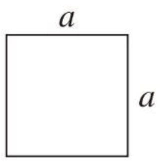
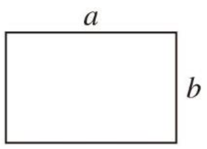
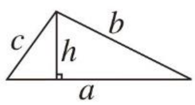
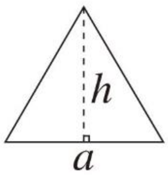
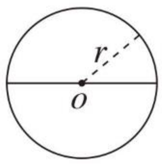
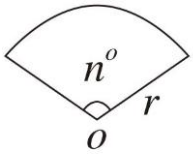
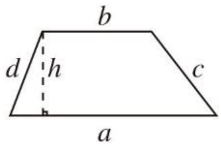
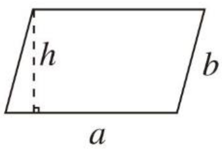
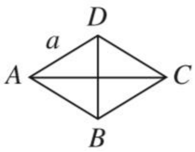
第十一讲　平面几何问题

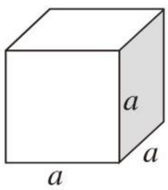
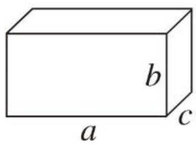
几何问题常见公式

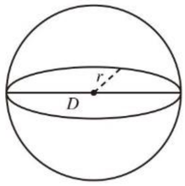
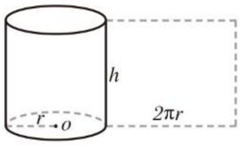
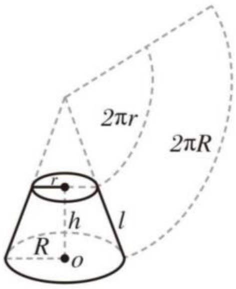
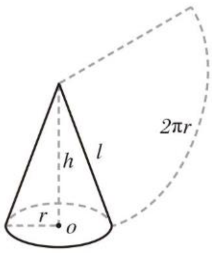
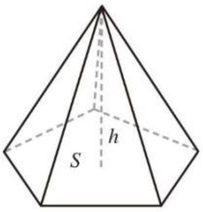
1、平面图形

平面图形	图示	周长	面积
正方形		$4a$	$S_{正方形}=a^2$
长方形		$2(a+b)$	$S_{长方形}=ab$
三角形		$a+b+c$	$S_{三角形}=\frac{1}{2}a\times h$
正三角形		$3a$	$S_{正三角形}=\frac{\sqrt{3}}{4}边长\times边长$
圆形		$2\pi r$	$S_{圆形}=\pi r^2$

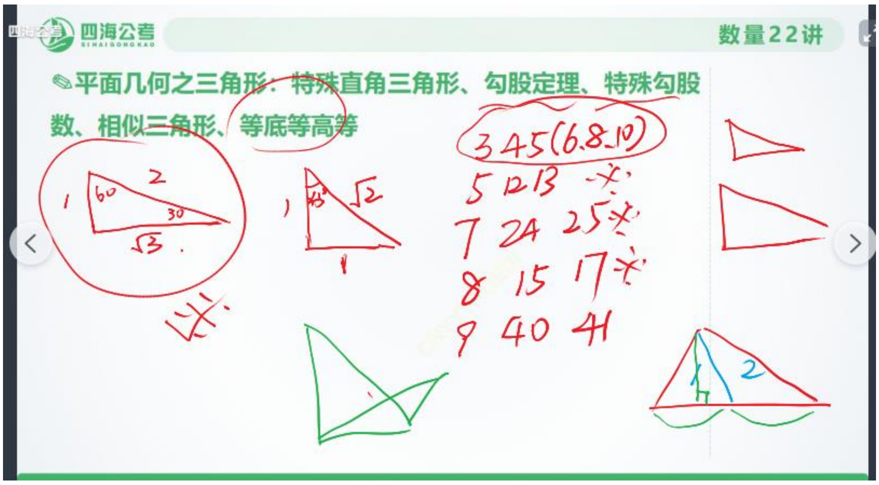
扇形		弧长 $=\frac{n}{360^o}\times$ 圆周长 $=\frac{n\pi r}{180^o}$ n 为圆心角	$S_{扇形}=\frac{n}{360^o}\times 圆面积=\frac{n\pi r^2}{360^o}=\frac{lr}{2}$ l 为弧长
梯形		$a+b+c+d$	$S_{梯形}=\frac{（上底+下底）\times 高}{2}$
平行四边形		$2a+2b$	$S_{平行四边形}=ah$
菱形		$4a$	$S_{菱形}=\frac{对角线\times 对角线}{2}$

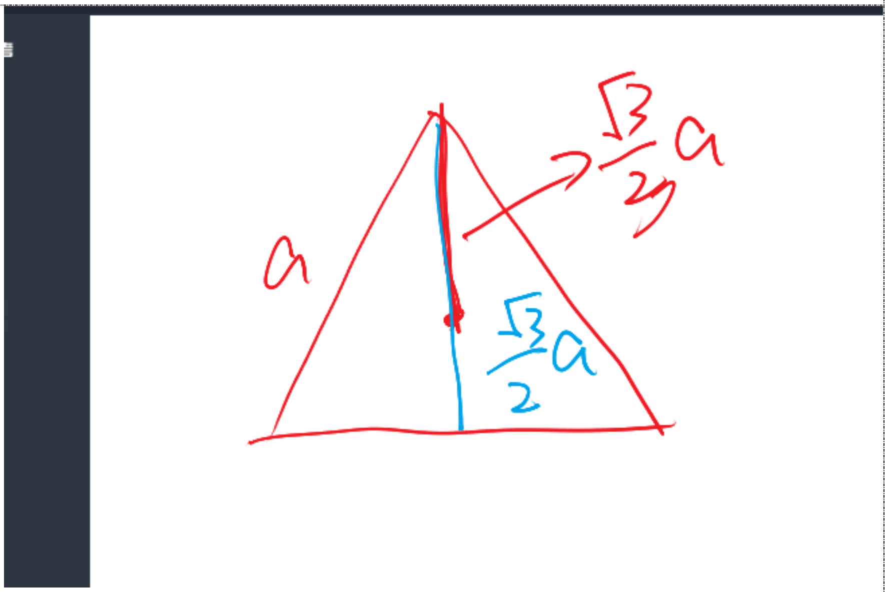
2、立体图形

立体图形	图示	表面积	体积
正方体		$6a^2$	a^3
长方体		$2(ab+ac+bc)$	abc

球体		$4\pi r^2 = \pi D^2$ （D 是直径）	$\frac{4}{3}\pi r^3$
圆柱体		$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
圆台		$\pi r^2 + \pi R^2 + \pi rl + \pi Rl =$ $\pi(r^2 + R^2 + rl + Rl)$ l 为母线 $l = \sqrt{（R-r）^2 + h^2}$ h 为圆台高	$\frac{1}{3}\pi h(r^2 + Rr + R^2)$ r 是小圆半径，R 是大圆半径
圆锥		$\pi r^2 + \pi rl$	$\frac{1}{3}Sh$ S 为底面积
棱锥		侧面积＋底面积	$\frac{1}{3}Sh$ S 为底面积

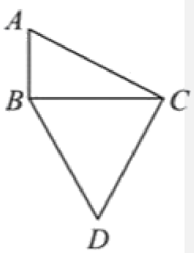
✎平面几何之三角形：特殊直角三角形、勾股定理、特殊勾股数、相似三角形、等底等高等





例题 1（2024 国考）

某公园内的道路如下图所示，其中 AB，BC 分别为正南北向和正东西向道路，AB，AC 分别长 100 米和 200 米。且 BCD 为正三角形，如要用直线道路连接 AD，则该道路的长度为多少米？



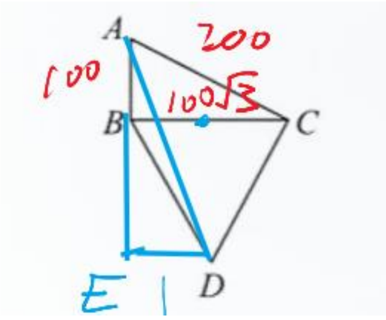
A. $150\sqrt{3}$　　B. $50(\sqrt{3}+1)$

C. $100\sqrt{7}$　　D. $200\sqrt{2}$

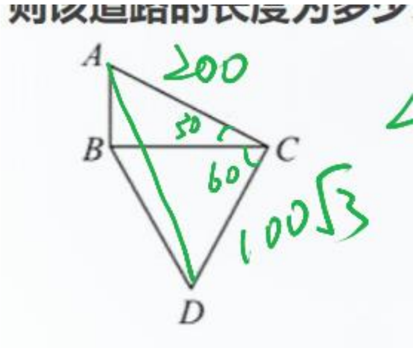
【参考答案】C

【实战解析】

由题，AB、AC 分别长 100 和 200 米，AC:AB＝2:1，∠ABC 为直角，可得∠ACB＝30°，BC＝$100\sqrt{3}$，因△BCD 为正三角形，则 BD＝CD＝$100\sqrt{3}$；

做法一：

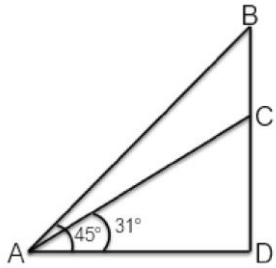
延长 AB 到 E，连接 ED，则∠EBD＝30°，ED＝$50\sqrt{3}$，BE＝150，由勾股定理，$AD^2＝AE^2＋ED^2＝250^2＋(50\sqrt{3})^2$，得到 AD＝$100\sqrt{7}$。

做法二：

由∠ACB＝30°，∠BCD＝60°，故∠ACD 为直角，根据勾股定理，AD=$\sqrt{40000+30000}$=$100\sqrt{7}$，选择 C。

例题 2（2023 湖北）

厦门鼓浪屿海滨覆鼎岩上屹立着一尊郑成功雕像。为了测量石像的高度，某测量小组选取的测量点 A 与覆鼎岩底部 D 在同一水平线上，如下图所示。已知覆鼎岩高 CD 为 24 米，在 A 处测得石像头顶部 B 的仰角为 45°，石像底部 C 的仰角为 31°（参考数据：sin31°≈0.52，cos31°≈0.86，tan31°≈0.60），则石像 BC 的高度约为多少？

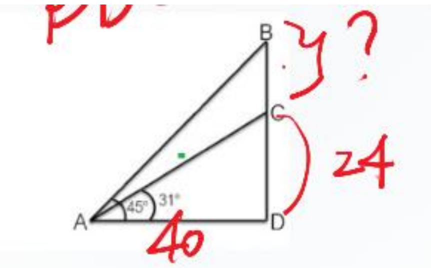


A. 20 米　　　　B. 18 米

C. 16 米　　　　D. 14 米

【参考答案】C

【实战解析】



观察△ACD，∠CAD＝31°，CD＝24，已知 tan31° $=\frac{对边}{邻边}=\frac{CD}{AD}=\frac{24}{AD}=0.6$，可得 AD 为 40 米，因∠BAD 为 45°，∠D 为 90°，则△ABD 为等腰三角形，BD＝AD＝40，故 BC＝BD－CD＝40－24＝16，选择 C。

例题 3（2024 山东省考）

某巡逻艇在海域 A 点发现正南方 30 千米处的 B 点有一艘可疑船只正匀速向正西方行驶，巡逻艇以比该可疑船只快$\frac{1}{3}$的速度沿某一方向直线追击，两船恰好在 C 点相遇。问 B、C 两点之间的距离约多少千米？

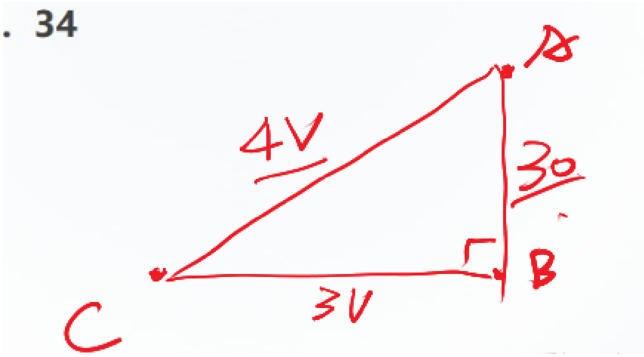
A. 26　　　　B. 28

C. 30　　　　D. 34

【参考答案】D

【实战解析】

由题，设可疑船速度为 3v，则巡逻艇速度为 4v，可作图如下：

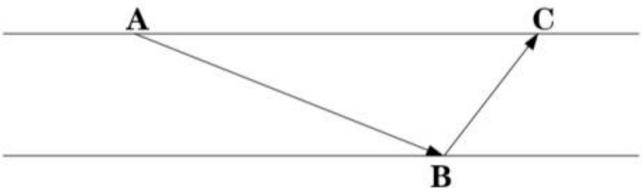


可根据勾股定理列式：$16v^2=9v^2+900$，可得 $v^2=\frac{900}{7}$，$v=\frac{30}{\sqrt{7}}$，则 $BC=3v=\frac{90}{\sqrt{7}}>30$，选择 D。

批注 [1]: 根号 7 不到 3，所以一定大于 30。

例题 4（2024 事业单位联考）

一条东西向的河流宽 50 米，如下图所示，甲划船从北岸的 A 点出发，直线航行 130 米后到达南岸的 B 点，然后向左转向 90 度继续直线行驶，到达河流北岸的 C 点，问 A、C 两点的距离在以下哪个范围内？

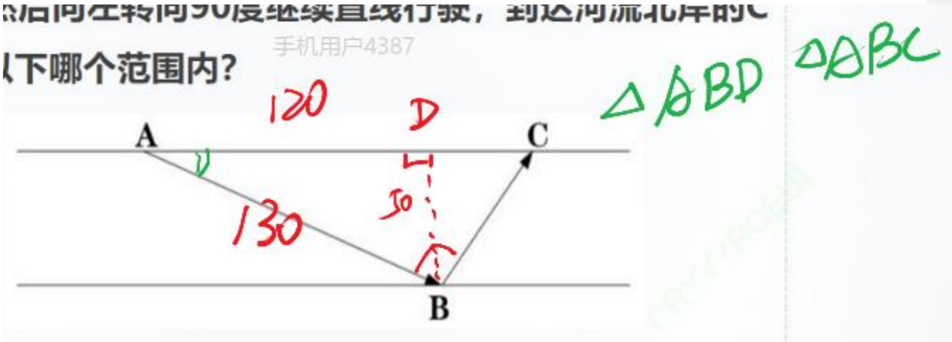


A．不到 150 米　　　　B．150～160 米之间

C．160～170 米之间　　D．超过 170 米

【参考答案】A

【实战解析】



作辅助线 BD，BD⊥AC,△ABD 为直角三角形，由题干 BD＝50，AB＝130，由勾股定理可得 AD＝120；

由△ABD 与△ABC 相似，可得$\frac{AC}{130}=\frac{130}{120}$，AC＜150，选择 A。

批注 [2]: ∠BAD＋∠ABD＝90°，∠BAD＋∠BCD＝90°，所以∠ABD＝∠BCD，且两个三角形都有直角，三个角均相等，为相似三角形。

例题 5（2022 国考）

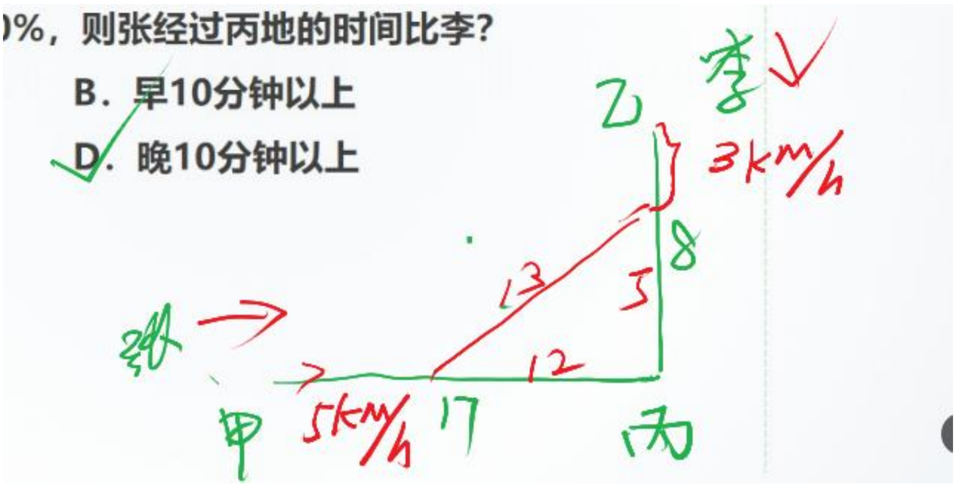
甲地在丙地正西 17 千米，乙地在丙地正北 8 千米。张从甲地、李从乙地同时出发，分别向正东和正南方向匀速行走。两人速度均为整数千米/小时，且 1 小时后两人的直线距离为 13 千米，又经过 3 小时后两人均经过了丙地且直线距离为 5 千米。已知李的速度是张的 60%，则张经过丙地的时间比李？

A．早不到 10 分钟　　　　B．早 10 分钟以上

C．晚不到 10 分钟　　　　D．晚 10 分钟以上

【参考答案】D

【实战解析】根据题干作图：

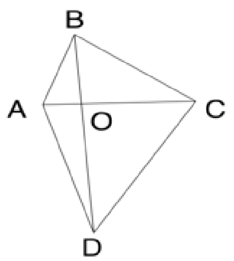


由题，直角三角形斜边为 13，由常见勾股数，可知另外两条边为 5km 和 12km，则 1 小时后，张走了 5km，李走了 3km，因李的速度是张的 60%，张李速度之比为 5:3，刚好符合二人走过的路程，故张和李的速度为 5km/h 和 3km/h；

则张经过丙地需 17/5＝3.4 小时，李经过丙地需 8/3≈2.6 小时，张比李用时晚 10 分钟以上，选择 D。

例题 6（2023 国考执法）

公园里有一片四边形草坪，沿对角线修建的小道相交于 O 点，O 到四个顶点 A、B、C、D 的距离之比正好为 1∶2∶3∶4，一名工人花费 1 天正好完成 AOB 区域的修剪，问第二天至少需要额外增加多少名效率相同的工人一起工作，才能在当天内完成剩余草坪的修剪？



A. 8　　　　B. 10

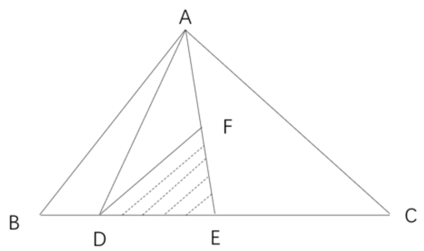
C. 11　　　　D. 12

【参考答案】B

【实战解析】假设 AOB 面积为 1，因△AOB 与△BOC 等高，所以底之比就是面积之比，由题 AO：OC＝1:3，故△BOC 的面积为 3，同理，△AOD 面积,2，△COD 面积为 6，草坪总面积为 1＋2＋3＋6＝12，因工人已经修剪完 AOB 区域，故剩下修剪面积为 11，又已知一名工人每天效率为 1，所以还需增加 10 名工人，选择 B。

例题 7（2023 吉林）

为推动产业园和产业集聚区加快转型，某地计划在三角形 ABC 区域内建设新能源产业园区（如下图所示），三角形 DEF 是中央工厂区，已知 BD∶DE∶EC＝1∶2∶3，F 为 AE 的中点，则新能源产业园区总面积是中央工厂区面积的多少倍？

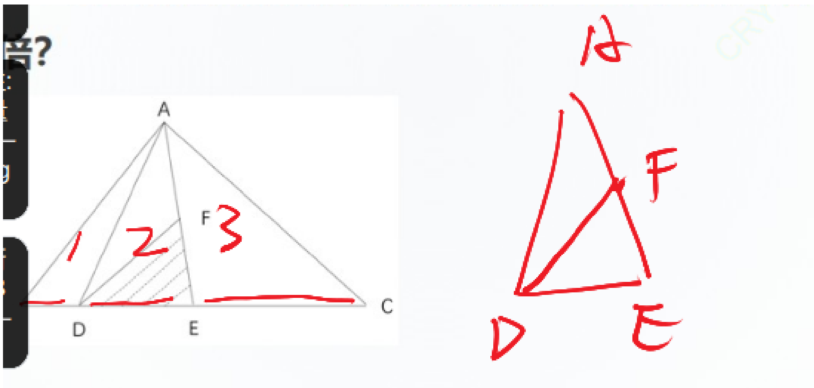


A. 7 倍　　　　B. 6 倍

C. 5 倍　　　　D. 4 倍

【参考答案】B

【实战解析】



由题，三角形 ADB、AED 和 ACE 等高，所以底之比就是面积之比，已知 BD：DE：EC＝1：2：3，故面积为 1、2、3，园区总面积为 6；

因三角形 FDE 和 ADE 同底，F 为 AE 中点，所以三角形 ADE 与三角形 FDE 面积比为 2:1，故三角形 FDE 面积为 1，可得园区总面积为中央工厂区面积的 6 倍，选择 B。

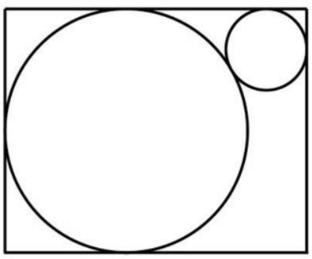
✎平面几何之其他：圆形、扇形、正方形长方形等

圆　πr^2 是面积

$2\pi r$ 是周长

例题 8（2023 浙江）

某地打算在绿地上建两个圆形花坛，如下图所示，大圆的直径为 6 米，小圆的直径为 2 米，修建期间暂时在外围设置围栏。已知围栏呈矩形，大圆与围栏的三条边相切，小圆与围栏的两条边相切，且两圆相切，那么矩形围栏的面积是多少平方米？

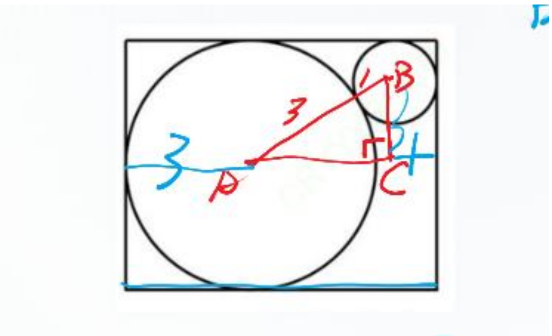


A. $12(2+\sqrt{3})$　　B. $12(1+2\sqrt{3})$

C. $12\sqrt{13}$　　D. $6(3+\sqrt{13})$

【参考答案】A

【实战解析】



将两圆圆心记为 A 和 B，连接 AB，作垂线 BC，此时 AC＝围栏的长－3－1；BC＝大圆半径－小圆半径＝3-1＝2，又已知 AB＝3＋1＝4，由勾股定理，AC＝$2\sqrt{3}$，则围栏的长＝$2\sqrt{3}$＋4，矩形围栏的面积为 6×（$2\sqrt{3}$＋4）＝12（$2+\sqrt{3}$），选择 A。

例题 9（2024 湖北）

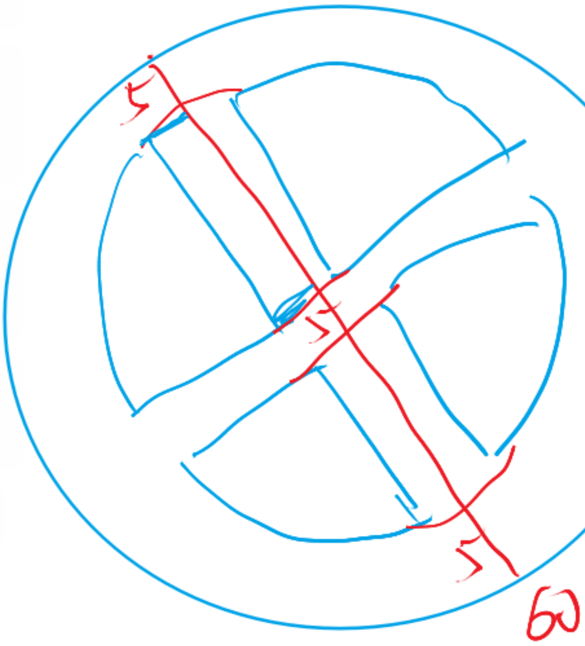
某单面圆形交通禁停标志牌如图所示，标志牌直径为 60cm，牌中各处红色区域宽度均为 5cm，某工厂承接 30 个该种标志牌的喷绘业务，已知每个标志牌的蓝色区域喷绘价格是 112.5 元，红蓝区域喷绘单价相同（价格仅按面积计算），那么 30 个标志牌喷绘共需多少元？

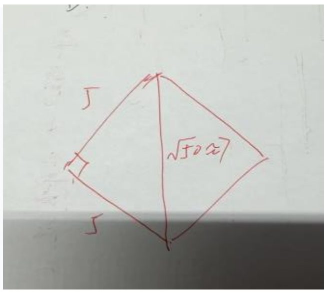
A. 3375 元　　B. 6000 元

C. 6750 元　　D. 8437.5 元

【参考答案】C

【实战解析】此题不严谨，最终计算结果只是靠近 C，且正常的直径应该是红线，但此题如果用红线作为直径，左上角的弧线和中间的横线，距离不相等，而题干说距离都是 5，所以不可以这样算。





此题单独计算红色区域和蓝色区域的面积过于复杂，因红蓝区域喷绘单价相同，故考虑计算蓝色区域的面积，算出面积占比，计算整体标志牌的喷绘价格；

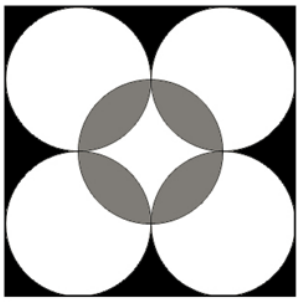
由题，红色部分宽度为 5，则中间部分为 7，已知标志牌直径为 60cm，则将蓝色区域拼在一起的圆直径为 60-5-5-7＝43，此时蓝色区域的直径与标志牌的直径之比为 43：60，半径之比也为 43：60，蓝色区域和整体标志牌面积之比即半径的平方比$\frac{43^2}{60^2}$；

批注 [3]: 中间红色正方形的对角线。

由喷绘单价为 112.5 元，设一个标志牌喷绘需要 x 元，可列式：$\frac{43^2}{60^2}=\frac{112.5}{x}$，$x=\frac{60^2}{43^2}\times112.5$，30 个标志牌需要 $x=\frac{60^2}{43^2}\times112.5\times30$，结果接近 C 选项，选择 C。

例题 10（2022 四川）

在一块边长为 8 米的正方形草坪上架设了 5 个自动洒水器，洒水器的洒水半径为 2 米（如图所示）。问草坪上同时被两个洒水器洒到水的区域（灰色）面积比没有洒到水的区域（黑色）面积？



A．小不到 5 平方米　　　　B．小 5 平方米以上

C．大不到 5 平方米　　　　D．大 5 平方米以上

【参考答案】A

【实战解析】此题需计算灰色区域面积和黑色区域面积；

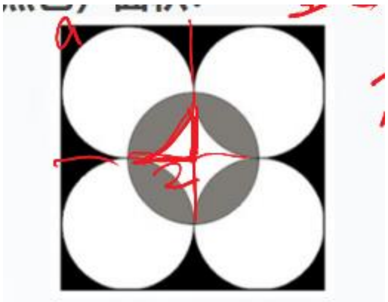
灰色部分的面积＝中间圆的面积－四个小图形；

观察可知，整个正方形边上的小图形和中间的形状一样，面积相同，可设为 a，则黑色部分共有 12 个 a 组成，面积为 12a，中间部分的四个小图形面积为 4a；因中间圆的半径为 2，所以灰色部分的面积＝4π-4a；

则灰色部分的面积-黑色部分的面积＝4π-16a，只需知道 a 的值；

分部分观察，看正方形的 1/4 部分，可以得到 4a 的面积为小正方形面积-圆的面积，即 4a＝4×4-4π＝16-4π；

所以 4π-16a＝4π-4（16-4π）＝20π-64＜5，选择 A。



例题 11（2019 广东）

如图所示，市政部门在一块周长为 260 米的长方形草地旁边铺设宽为 10 米的 L 形道路。已知铺好道路后，道路和草地面积之和为草地面积的 1.5 倍，则草地的面积为多少平方米？

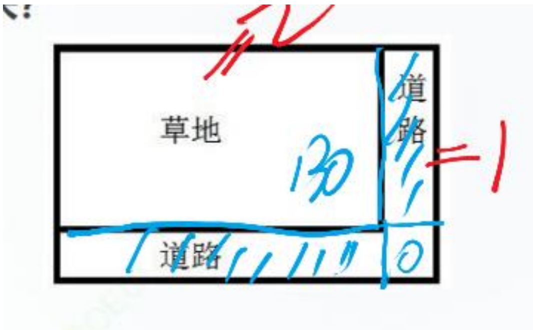
A. 4200　　B. 4000

C. 3000　　D. 2800

【参考答案】D

【实战解析】道路和草地面积之和为草地面积的 1.5 倍，相当于道路面积是草地面积的 0.5 倍，草地与道路面积之比为 2:1；

草地周长为 260 米，则一长一宽为 130 米，阴影部分的面积就为 130×10＝1300，此时道路面积还差右下角的正方形，由题可知，正方形边长为 10 米，面积为 10×10＝100，所以道路面积为 1300＋100＝1400，草地面积为 2×1400＝2800，选择 D。



例题 12（2023 浙江）

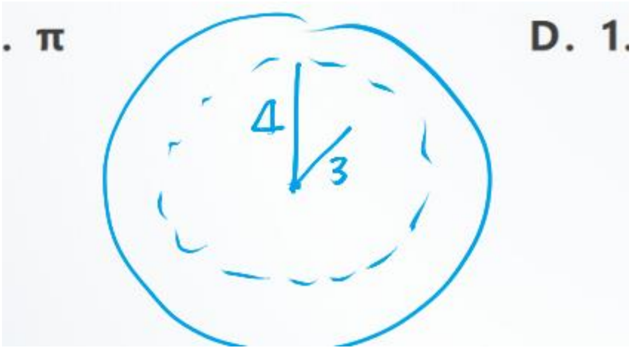
一只闹钟的秒针顶点距离表盘圆心 4 厘米，分针顶点距离表盘圆心 3 厘米。小王烧开一壶水的时间内，秒针顶点累计移动了 40π 厘米。那么这一时间段内，分针顶点与表盘圆心的连线扫过的扇形面积为多少平方厘米？

A. 0.5π　　B. 0.75π

C. π　　D. 1.5π

【参考答案】B

【实战解析】如图，秒针走过一圈的长度为 $2\pi r=8\pi$，则 40π 就是走了 5 圈，即 5 分钟；求分针扫过的扇形面积，先看分针扫过一圈的面积为 $\pi r^2=9\pi$，走过一圈耗时 60 分钟，现在过了 5 分钟，即过了 $\frac{1}{12}$小时，分针扫过的面积为 $9\pi\times\frac{1}{12}=0.75\pi$，选择 B。


. π
D. 1.
4
3