第十五讲　特殊情境之相邻/不相邻问题与环形排列

✎**相邻问题：**捆绑法

例题 1（2020 新疆）

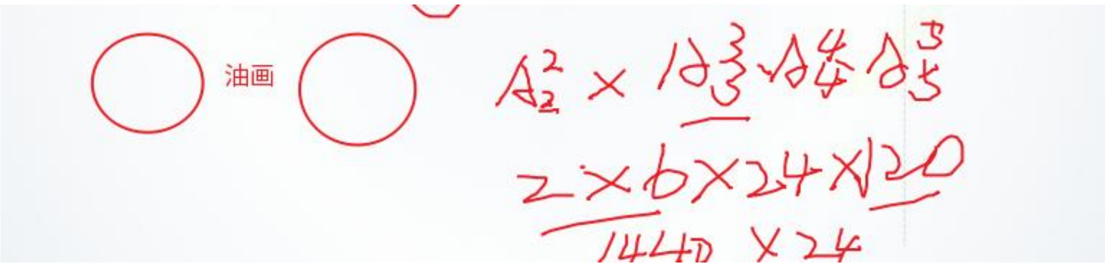
某美术馆计划展出 12 幅不同的画，其中有 3 幅油画、4 幅国画、5 幅水彩画，排成一行陈列，要求同一种类的画必须连在一起，并且油画不放在两端，问有多少种**不同**的陈列方式？

A．不到 1 万种　　　　　　　　　　B．1 万～2 万种之间

C．2 万～3 万种之间　　　　　　　**D．超过 3 万种**

【答案】D

【解析】油画不放在两端,只能在中间，那么有两种情况，国画或者水彩画在前边，然后三种画内部再排序，公式如图=2×6×24×120=34560。



例题 2（2025 国考）

小王计划在 7 天假期自学甲、乙两门在线课程，每门课程需要连学 2 整天。如在所有可能的安排中随机选择 1 种，不用学习的 3 天均**不相邻**的概率为？

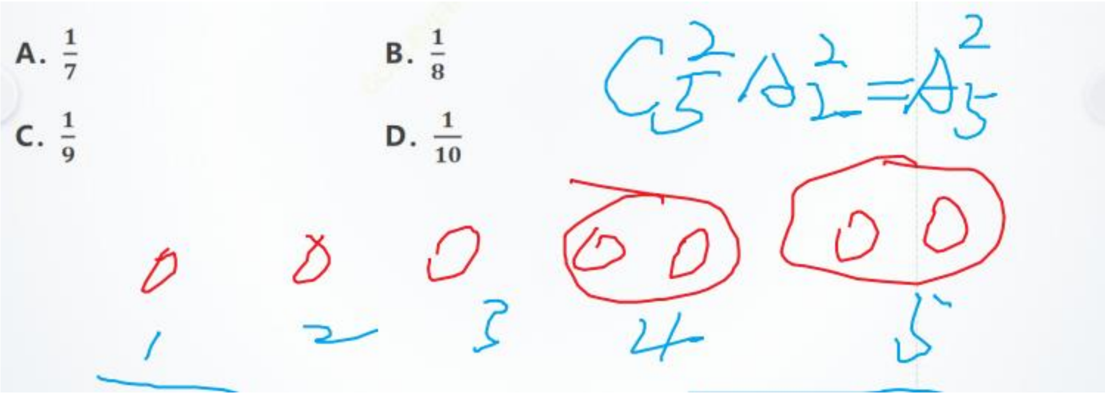
A．$\frac{1}{7}$　　　　　　　　　　B．$\frac{1}{8}$

C．$\frac{1}{9}$　　　　　　　　　　**D．$\mathbf{\frac{1}{10}}$**

【答案】D

【解析】甲、乙两门在线课程，每门课程需要连学 2 整天，7 天，捆绑两组 2 天，

元素变成 3+1+1=5，在五个元素里面选 2 个作为甲乙，并且甲乙有顺序,即$A_2^2 \times C_5^2$=20。
要满足不用学习的 3 天均不相邻,用插空法,甲乙排列好有三个空,所以只有A_2^2=2。
概率为 $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$。



例题 3（2022 青海）

某单位拟于下周周一至周六期间举办“人人学党史，人人讲党史”和“我为群众办实事”实践活动，每个活动均需连续开展两天，那么这两个活动的时间完全**不重叠**的概率为多少？

A．40%

B．48%

C．52%

D．60%

【答案】B
【解析】六天，把其中两天捆绑为一个，变成五个元素，选其中一个元素办活动，即C_5^1，两个活动可以重叠也就是互不影响，即$C_5^1 \times C_5^1$=25。
两个活动不重叠，我们可以利用捆绑法，6 天捆绑成两组 2 天，共有 2+1+1=4 个元素，从四个元素中选择两个为这两个活动，即A_4^2=12。
概率为 $\frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 48\%$ 。

例题 4（2022 湖北选调）

某单位组织员工参加业务培训，小王和小李所在部门员工 10 人在同一排就坐，一排正好 10 个座位，假设座位是随机安排的。问小王和小李之间相隔人数小于等于 3 人的概率为多少？

A．$\frac{1}{3}$

B．$\frac{1}{2}$

C．$\frac{8}{15}$

D．$\frac{2}{3}$

【答案】D
【解析】小李小王相隔人数小于等于 3 人，有 0、1、2、3 四种可能。
小李小王捆在一起，总元素 9 个，则为C_9^1=9

小李小王加一个空位，总元素 8 个，则为C_8^1=8
小李小王加 2 个空位，总元素 7 个，则为C_7^1=7
小李小王加 3 个空位，总元素 6 个，则为C_6^1=6

概率为 $\frac{9+8+7+6}{C_{10}^2}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$。

例题 5（2024 联考）

某公司开展迎新春三分球投篮比赛。3 个部门分别派出 2、4、4 个选手共计 10 人参加。规则要求同一个部门的选手顺序相连、全部投完再安排另一个部门的人员，则这 10 人**不同**的投篮顺序种数的范围是？

A．小于 1000　　B．1000～5000

C．5001～10000　　D．10000 以上

【答案】C

【解析】三个部门分别捆绑，三个部门再排序，如图所示：

$$A_3^3\cdot A_2^2\cdot A_4^4\cdot A_4^4=576\times12=6912$$

例题 6（2023 浙江）

12 个人排成 1 列纵队，从前到后编为 1~12 号。现要将他们排成另一个与原来不同的纵队并从前到后重新编号，要求每个人的新号码与原始号码相差不超过 1。那么有多少种重新编队的方法？

A．155　　B．227

C．232　　D．239

【答案】C

【解析】新号码与原始号码相差不超过 1，就只能和前面相邻或者后面相邻的两个换，所以换位置的这两个一定是相邻的。

一组 2 个人换位置，捆绑，总元素为 11，C_{11}^1
两组 2 个人换位置，总元素变成 8+1+1=10，C_{10}^2
三组 2 个人换位置，总元素变成 6+1+1+1=9，C_9^3
四组 2 个人换位置，总元素变成 4+1+1+1+1=8，C_8^4
五组 2 个人换位置，总元素变成 2+1+1+1+1+1=7，C_7^5
六组 2 个人换位置，总元素变成 6，C_6^6

$C_{11}^1+C_{10}^2+C_9^3+C_8^4+C_7^5+C_6^6$=232。

✎**不相邻问题：**

插空法

例题 7（2020 联考）

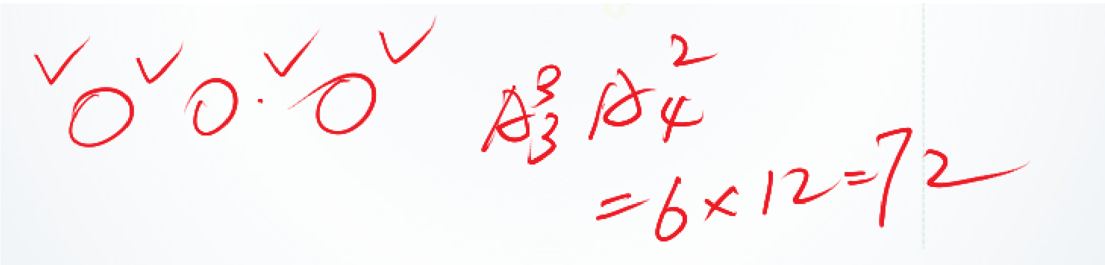
某学习平台的学习内容由观看视频、阅读文章、收藏分享、论坛交流、考试答题五个部分组成。某学员要先后学完这五个部分，若观看视频和阅读文章不能连续进行，该学员学习顺序的选择有多少种？

A．24 种　　　　**B．72 种**

C．96 种　　　　D．120 种

【答案】B

【解析】观看视频和阅读文章不能连续进行，即这两个不相邻，其它 3 个排序，形成 4 个空，观看视频和阅读文章插进去。



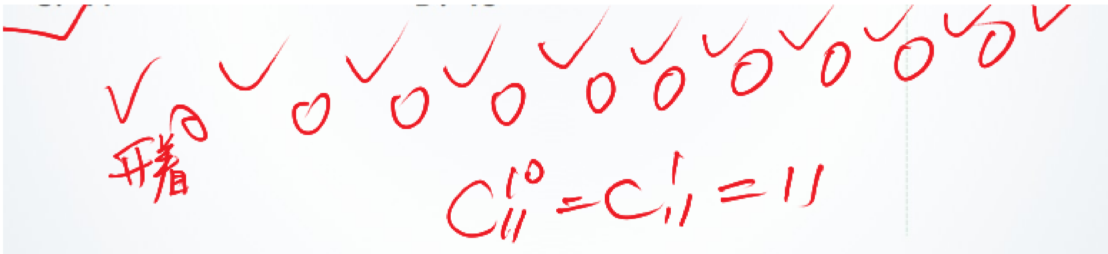
例题 8（2018 广东）

某条道路一侧共有 20 盏路灯。为了节约用电，计划只打开其中的 10 盏。但为了不影响行路安全，要求相邻的两盏路灯中至少有一盏是打开的，则共有多少种开灯方案？

A．2　　　　B．6

C．11　　　　D．13

【答案】C
【解析】关闭的灯不能挨着，也就是不相邻，开着的路灯没有要求。把十个开着的灯排好，有 11 个空，插进去 10 个不开灯的路灯即可。



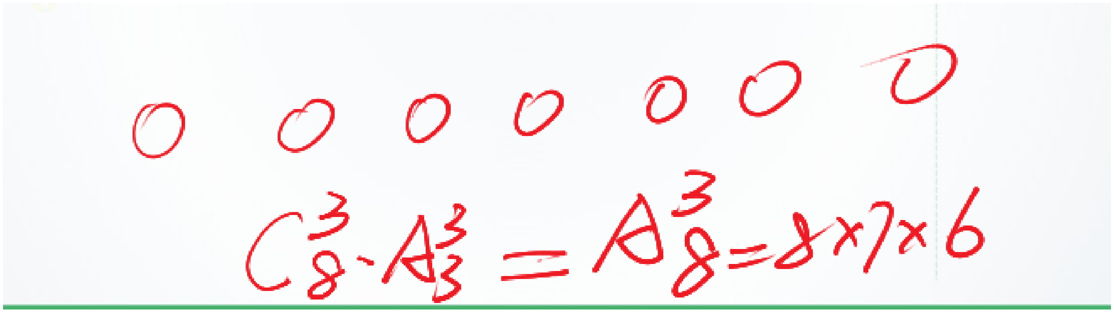
例题 9（2023 北京）

某车库有 10 个并排的车位，有 3 辆不同的车要停进这 10 个车位之中，而且彼此不能相邻，则有多少种**不同**的停放方法？

A．336　　　　B．246

C．156　　　　D．66

【答案】A
【解析】先画出不停车的七个空车位，形成 8 个空，从中选 3 个，三辆车有顺序，如图共有 336 种。



例题 10（2023 浙江）

某停车场有 7 个连成一排的空车位。现有 3 辆车随机停在这排车位中，则任意两辆车之间至少间隔一个车位的概率为多少？

A．$\frac{1}{5}$　　　　**B．$\frac{2}{7}$**

C．$\frac{6}{35}$　　　　D．$\frac{9}{35}$

【答案】B
【解析】先画出 4 个空车位，形成 5 个空，从中选 3 个，三辆车有顺序，是分子；分母是七选三，有顺序；如图：

$$P=\frac{A_5^3}{A_7^3}=\frac{5\times4\times3}{7\times6\times5}=\frac{2}{7}$$

$$\wedge O \wedge O \wedge O \wedge O \wedge$$

例题 11（2023 安徽）

某空军基地举行飞行训练，有 8 架歼击机、3 架预警直升机、2 架反潜直升机参与训练，每架飞机编号不同。训练时，需派出 3 架歼击机、2 架预警直升机、1 架反潜直升机进行起降飞行。若每次只能起飞 1 架飞机，其中 3 架歼击机必须相邻起飞，2 架预警直升机不能相邻起飞，那么**不同**的起飞方式有多少种？

A．504　　　　B．4032

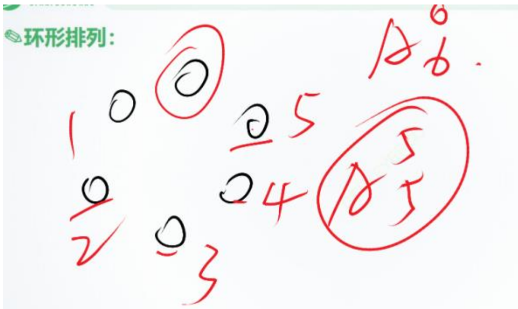
C．8064　　　　**D．24192**

【答案】D

【解析】首先把 3 架歼击机、2 架预警直升机、1 架反潜直升机选出来。把 3 个歼击机捆起来，变成了 1 个歼击机（3 架要内部排序）、2 架预警直升机、1 架反潜直升机。然后将歼击机和反潜直升机，排上，有顺序，形成 3 个空，将 2 架预警直升机插空，有顺序，如图所示，共 24192 种。

$$C_8^3\times C_3^2\times C_2^1\cdot A_3^3\cdot A_2^2\cdot A_3^2$$

✎**环形排列：**6 个人环形排列，A_5^5



例题 12（2021 云南）

两个大人带四个孩子去坐只有六个位置的圆型旋转木马，那么两个大人**不相邻**的概率为多少？

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】①直接用不相邻的方法：六个人环形排列A_5^5，四个小孩环形排列A_3^3，形成四个空，两个大人插进去，A_4^2

① $P=\frac{A_3^3\times A_4^2}{A_5^5}=\frac{3}{5}$

②1-相邻：六个人环形排列A_5^5；两个大人捆绑在一起，有顺序，A_2^2，和剩下的四个小孩加起来一共 5 个元素环形排列，A_4^4

② $P=1-\frac{A_4^4\cdot A_2^2}{A_5^5}=\frac{3}{5}$

③不考虑小孩只看两个大人：6 个位置选两个给大人，A_6^2。要满足要求，先让一个大人坐C_6^1，剩下的一个大人在不相邻的 3 个位置上坐，C_3^1

③ $P=\frac{C_6^1\cdot C_3^1}{A_6^2}=\frac{6\times3}{6\times5}=\frac{3}{5}$

④跟屁虫方法：

④跟屁虫 $P=\frac{3}{6-1}=\frac{3}{5}$

例题 13（2012 年国考）

有 5 对夫妇参加一场婚宴，他们被安排在一张 10 个座位的圆桌就餐，但是婚礼操办者并不知道他们彼此之间的关系，只是随机安排座位。问 5 对夫妇恰好都被安排在一起相邻而坐的概率是多少？

A．在 1‰到 5‰之间　　B．在 5‰到 1%之间

C．超过 1%　　D．不超过 1‰

【答案】A

【解析】10 个人环形排列，A_9^9；将十个人捆绑为 5 对夫妻，内部有顺序，然后这 5 个元素环形排列，即$A_4^4\times2\times2\times2\times2\times2$。

$$P=\frac{A_4^4\cdot(A_2^2)^5}{A_9^9}=\frac{A_4^4\times2^5}{A_9^9}=\frac{\cancel{32}\times\cancel{4}\,2}{9\times\cancel{8}\times7\times\cancel{6}^{3}\times5}=\frac{2}{945}$$